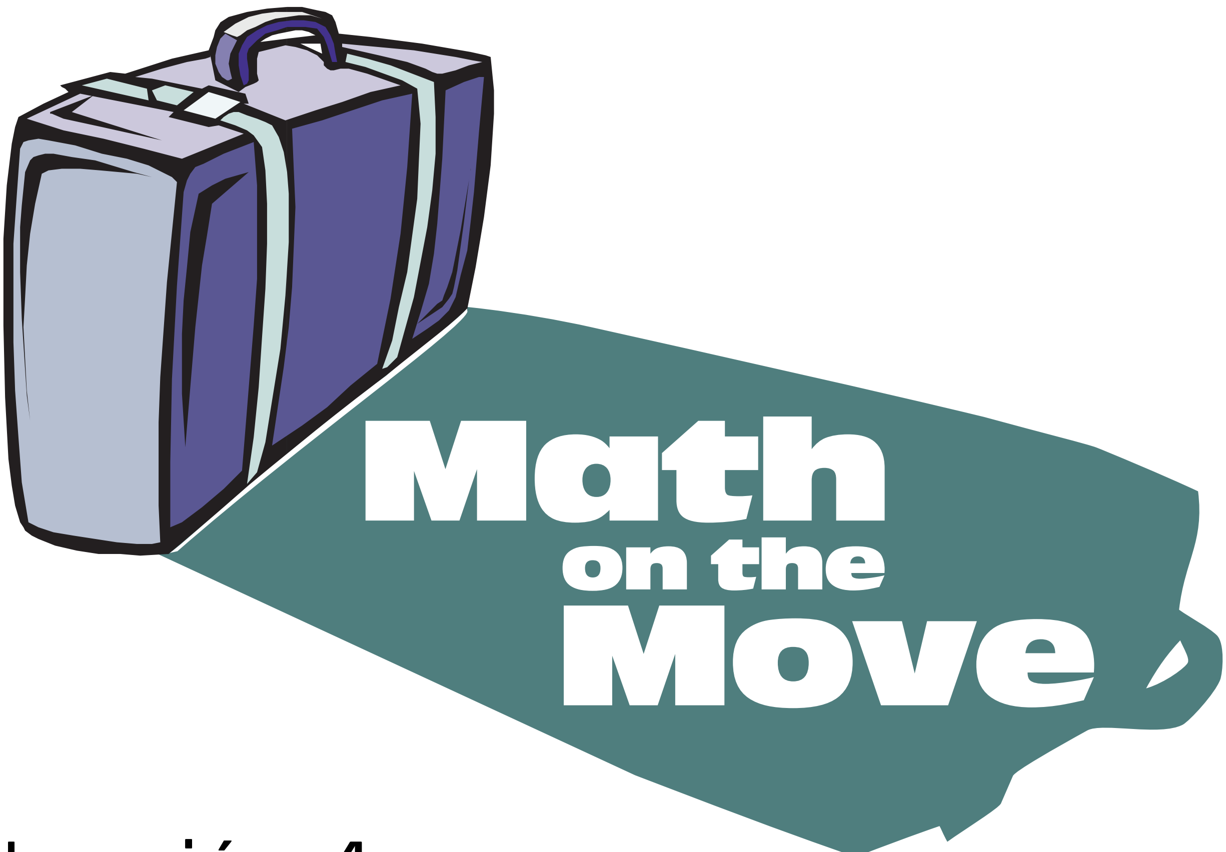
Nombre del estudiante: ______________________________

Fecha: ______________________________

Nombre de la persona de contacto: ______________________________

Número de teléfono: ______________________________



Lección 4

Factores y Múltiplos

Objectivos

- Entender qué son los factores y los múltiplos
- Escribir un número como un producto de sus factores primos
- Hallar el máximo común factor y el mínimo común múltiplo de dos números
- Usar el orden correcto de las operaciones

Autores:

Jason March, B.A.
Tim Wilson, B.A.

Traductores:

Felisa Brea
Hugo Castillo

Editor:

Linda Shanks

Gráficos/Gráficas:

Tim Wilson
Jason March
Eva McKendry

Como el sistema de medidas estándar es usado comúnmente en los Estados Unidos, esas unidades de medida (inches, feet, yards, miles, pounds, ounces, cups, pints, quarts, y gallons) han sido dejadas en inglés. Estas unidades de medida aparecen en mayor detalle en la lección 14.

Centro National PASS
Centro Migrante BOCES Geneseo
27 Lackawanna Avenue
Mount Morris, NY 14510
(585) 658-7960
(585) 658-7969 (fax)
www.migrant.net/pass

Preparado por el Centro PASS bajo los auspicios del Comité Coordinador Nacional de PASS con fondos del Centro de Servicios de Educación de la Región 20, San Antonio, Texas como parte del proyecto dei Consorcio de Incentiva del Programa de Educación Migrante (MAS) = Logros en Matemáticas Achievement = Success (MAS) - Además, del apoyo de proyecto del Consorcio de Incentiva del Programa de Educación Migrante de Oportunidades para el Éxito para los Jóvenes fuera–de-la-Escuela (OSY) bajo el liderazgo del Programa de Educación Migrante de Kansas.

Un día, un grupo de amigos y tú deciden jugar al baloncesto. Hay 12 personas en total, y tratas de decidir cómo separar los equipos. Tu amigo Ramón sugiere que jueguen un torneo con varios equipos. ¿Cuántos equipos diferentes puede hacer usando 12 personas?

Podemos pensar en este problema usando la multiplicación.

Tú y tus amigos pueden ser considerados como 1 grupo de 12 personas,

$$1 \times 12 = 12$$

Puedes separarlos en 2 equipos de 6 personas,

$$2 \times 6 = 12$$

o 3 equipos de 4 personas.

$$3 \times 4 = 12$$

También puedes hacer 4 equipos de 3, 6 equipos de 2, o incluso 12 equipos de 1.

$$4 \times 3 = 6 \times 2 = 12 \times 1 = 12$$

Si ordenamos todos los números enteros que se usan para multiplicar por 12, son:

1, 2, 3, 4, 6, 12

Observa que 12 es <u>divisible</u> por todos esos números.

Son todos **factores** de 12. Lee la siguiente definición con mucho cuidado.

- Cuando los números enteros, excepto cero, se multiplican juntos, cada número es un **factor** del producto. Así mismo, si un número entero se divide exactamente entre un número, entonces el divisor y el cociente son **factores** de ese número. Por ejemplo, 2 y 7 son factores de 14 porque $2 \times 7 = 14$, y también porque $14 \div 7 = 2$.

En el problema del baloncesto, dijimos que dos maneras diferentes de agrupar eran

$$3 \times 4 \text{ y } 4 \times 3$$

Cuando hacemos una lista de los factores de un número, necesitamos sólo contar cada factor una vez, entonces no escribas el mismo factor dos veces. Así, 3 y 4 se mencionan sólo una vez como factores de 12.

¡Inténtalo!

1. Haz una lista de todos los factores de los siguientes números:
   a) 24

   b) 10

   c) 36

Todavía pensando en 12, decimos que dos de sus factores son 2 y 6.

Observa que 2 no tiene factores otros que 1 y sí mismo, 2. Debido a este hecho, 2 se define como número **primo**.

- Un número es **primo** si sus <u>únicos</u> factores son 1 y sí mismo.
  Por ejemplo, 5 es primo porque ningún número se divide por él exactamente excepto 1 y 5.

6, por otro lado, tiene más factores. Todos los números que se dividen exactamente por 6 son

1, 2, 3, 6

Porque hay factores de 6 además de 1 y 6, decimos que 6 es un número **compuesto**. En otras palabras, es una <u>composición</u> de muchos factores.

- Un número **compuesto** es un número entero mayor que 1 que tiene factores además de 1 y sí mismo. Por ejemplo, 4 es compuesto porque tiene de factor a 2.

Dijimos, 6 es compuesto, y podemos escribirlo como un <u>producto</u> de dos de sus factores, como

$$6 = 2 \times 3$$

Antes, dijimos que

$$12 = 6 \times 2$$

Ahora, decimos que

$$12 = 2 \times 3 \times 2$$

Sólo <u>sustituimos</u> algo igual a 6 donde el número 6 estaba. Ahora, el número 12, escrito como

$$12 = 2 \times 3 \times 2$$

tiene dos factores, 2, y un factor 3.

Escrito de esa manera, ¡12 es un producto de sólo factores primos!

Una manera útil de calcular los factores de un número en primos es creando un diagrama de un <u>árbol de factores</u>.

> **HECHO**
>
> *El número 1 no es ni número primo ni compuesto*

> **HECHO**
>
> *Cada número entero puede escribirse como un producto de factores primos. Ésta es una propiedad muy especial llamada* ***<u>¡Teorema Fundamental de Aritmética!</u>***

Ejemplo

Escribe 72 como un producto de sus factores primos.

Solución

Lo resolveremos con el método del árbol de factores.

Paso 1: Escribe el número que quieres separar en factores.

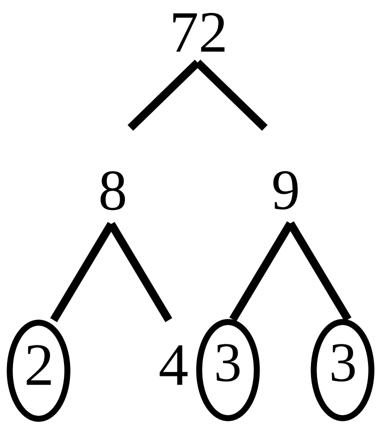
$$72$$

Paso 2: Traza dos "ramas" desde ese número, con factores que multiplican al número de arriba. No uses nunca el factor 1.

$$72$$

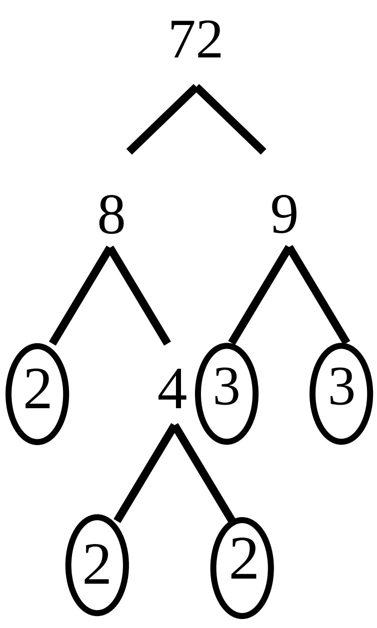
$$8 \quad\quad 9$$

Paso 3: Continúa trazando ramas desde cada factor, hasta que alcances un número primo. Mete en un círculo cada factor primo a medida que aparecen.



Encuentra los factores de 8 y 9, y mete en círculo los factores primos.

Ahora encuentra los factores de 4, y mete en un círculo sus factores primos.



Sauce llorón

Nuestro árbol de factores está ahora completo, pero todavía no hemos terminado el problema.

Paso 4: Escribe como un producto de primos.

Vemos que nuestro producto final es igual a

$$72 = 2\times 3\times 3\times 2\times 2 = 2\times 2\times 2\times 3\times 3$$

Aquí está paso-a-paso el método que acabamos de hacer.

HECHO

No importa el orden en el que se multipliquen los números

Algoritmo

Para encontrar los factores de un número:

1. Escribe el número que quieres separar en factores arriba.
2. Debajo del número, traza dos ramas. Los números al final de las ramas serán factores cuyo producto es el número de arriba (no uses los factores 1 ni el número).
3. Una vez que llegues a un número primo, enciérralo en un círculo, y continúa con los factores de los números compuestos.
4. Escribe el número como un producto de sus factores primos.

¡Inténtalo!

2. Separa en factores cada número usando un árbol de factores, luego escribe el número como un producto de factores primos.

a) 64 b) 100 c) 36

El método del árbol de factores es muy útil para hallar los factores primos de un número, pero también lo podemos usar para hallar los **factores comunes** entre dos (o más) números.

> Cuando se comparan dos (o más) números:
>
> - Factores que tienen sólo uno de los números, se llaman **factores únicos**.
> - Factores compartidos por los números se llaman **factores comunes**.
> - El mayor factor que dos (o más) números comparten es su **máximo común factor**, o su **MCF**. Así, el MCF de 4 y 6 es 2.

Considera el ejemplo siguiente.

Ejemplo

Encuentra el máximo factor común de 90 y 135.

Solución

La manera más obvia de resolver este problema es hacer una lista de factores de cada número, hallar sus factores comunes, y después determinar cuál es el factor más grande.

Factores de 90: 1, 2, 3, 5, 9, 10, 18, 30, **45**, 90

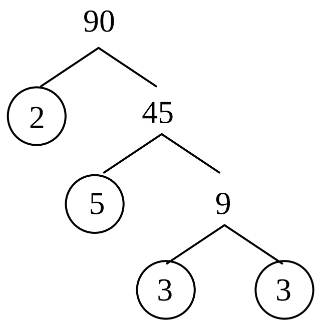
Factores de 135: 1, 3, 5, 9, 15, 27, **45**, 135

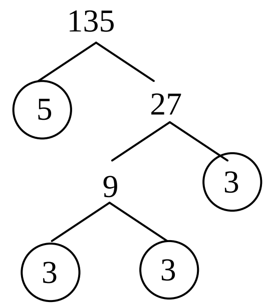
Entonces vemos que 45 es el MCF de 90 y 135.

Sin embargo, no es eficiente hacer la lista de cada factor de 90 y 135. Además es fácil olvidarse de factores, y hacer errores al usar este método. Por suerte, hay una manera más fácil de resolver este problema que usa árboles de factores y diagramas de Venn.

El otro método:

Paso 1: Separa en factores cada número usando un árbol de factores, y escríbelo como un producto de factores primos.

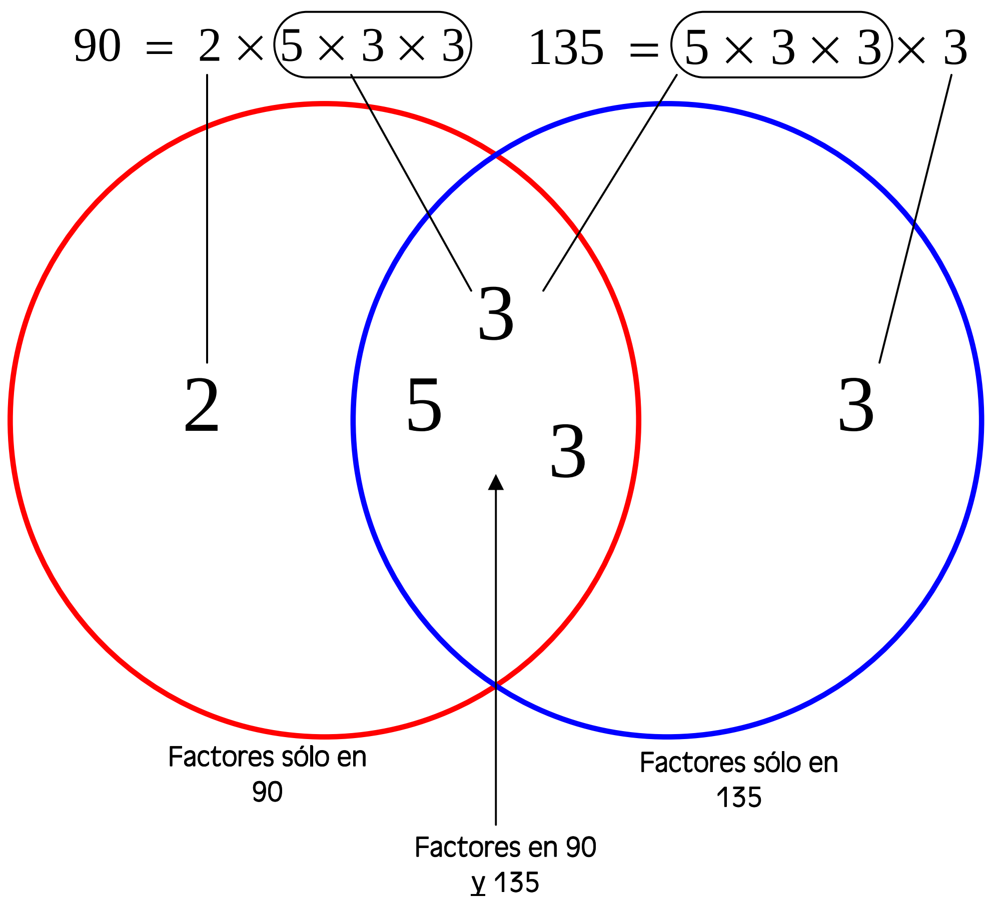




$90 = 2 \times 5 \times 3 \times 3$

$135 = 5 \times 3 \times 3 \times 3$

Paso 2: Clasifica usando un diagrama de Venn



Paso 3: Con el primer método, encontramos que el MCF era 45. Mira a los factores primos comunes de 90 y 135. Hay 5 y dos 3. Observa que

$$5 \times 3 \times 3 = 45$$

Ésta es la misma respuesta que en el primer método, y es una buena manera de evitar olvidarse de factores.

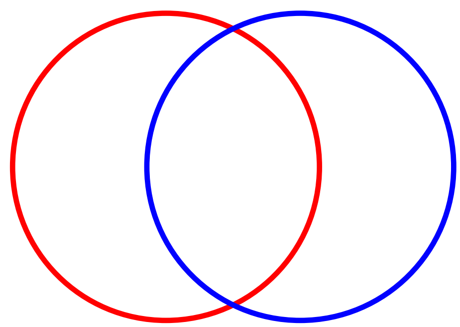
Algoritmo

Para hallar el máximo común factor (MCF):

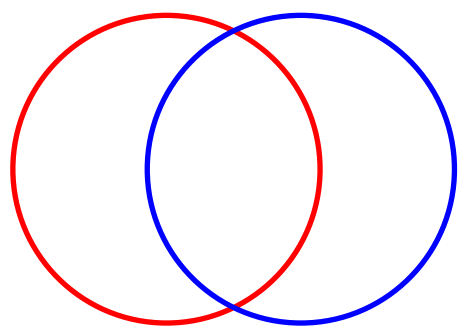
1. Separa los factores de cada número, y escríbelo como un producto de factores primos.
2. Organiza los factores de cada número usando un diagrama de Venn.
3. Multiplica todos los números en el centro de la sección de Venn juntos. Esto es el MCF.

1. Encuentra el máximo factor común para cada par de números.

a) 72 y108



b) 70 y 315



Esto será una buena preparación para cuando trabajemos con fracciones.

Después de que tus amigos y tú terminan de jugar al baloncesto, decides invitarlos a todos a tu casa a una parrillada. De camino a casa, pasas por la tienda para comprar salchichas y pan. Observa que las salchichas vienen en paquetes de 6, y las bolsas de pan tienen 8 bollitos. Te das cuenta de que esto no está bien porque quieres comprar el mismo número de una cosa que de otra. Tu amigo Ramón sugiere que compres múltiples paquetes de salchichas y de bollitos de pan para tener el mismo número de una cosa y otra. ¿Cómo determinas el número de paquetes de perritos y de bollitos que necesitas comprar?

Piensas cuántas salchichas tendrás si compras paquetes múltiples. Te das cuenta de que éste es un problema de multiplicación. El número de paquetes que compras por 6, te da el número de salchichas que tendrás. Los números de salchichas que puedes comprar son

6, 12, 18, 24, 30, 36...

Entonces piensa cúantos bollitos de pan necesitas si compras paquetes múltiples. El número de paquetes, por 8, te da el número de bollitos. Los números de bollitos que puedes comprar son

8, 16, 24, 32, 40, 48...

Las salchichas vienen en **múltiplos** de 6, y el pan viene en **múltiplos** de 8.

- Un **múltiplo** de un número es el producto de ese número y cualquier número entero positivo excepto cero. Por ejemplo, 20 es un múltiplo de 4 $(4 \times 5 = 20)$

Como podemos ver, 6 y 8 tienen algunos múltiplos en común

Múltiplos de 6:	6,	12,	18,	**24**,	30,	36,	42,	**48**...
Múltiplos de 8:	8,	16,	**24**,	32,	40,	**48**,	56,	72...

Vemos que 6 y 8 tienen de múltiplos a 24 y 48. Estos son múltiplos comunes. En nuestro problema, los múltiplos comunes ocurren cuando tenemos el mismo número de salchichas y de bollitos de pan. El menor múltiplo que estos números comparten es el **mínimo común múltiplo**.

- El múltiplo menor que dos números tienen se llama el **mínimo común múltiplo**, o **MCM**.

Entonces, puedes comprar 24 salchichas y bollitos de pan. Es decir, si compras 4 paquetes de salchichas y 3 paquetes de bollos de pan, terminarás con 24 de cada. Esto es porque

$$4 \times 6 = 3 \times 8 = 24 .$$

Ejemplo

Encuentra el MCM de 12 y 20

Solución

Usando el método más obvio, podemos hacer una lista de los múltiplos de cada número.

Múltiplos de 12 son: 12, 24, 48, **60**, 72, ...

Múltiplos de 20 son: 20, 40, **60**, 80, 100, ...

Nuestro mínimo común múltiplo es 60.

HECHO *El MCM de dos números es el producto de esos dos números dividido por su MCF.*

Veamos si esto funciona

Factores de 12:	1,	2,	3,	**4**,	6,	12
Factores de 20:	1,	2,	**4**,	5,	10,	20.

4 es el MCF.

$$12 \times 20 = 240$$

$$240 \div 4 = 60$$

¡Sí, funciona! Puedes usar este hecho para verificar tu respuesta cuando halles el MCM de dos números.

¡Inténtalo!

4. Encuentra el <u>mínimo común múltiplo</u> de cada par de números.

   a) 8 y 16

   b) 24 y 84

   c) 13 y

El MCM será muy útil para las fracciones.

Cuando planeas tu parrillada, te das cuenta de que tus amigos tienen mucha hambre. Cada persona querrá comer 3 salchichas. Como había 12 personas jugando, te das cuenta de que 24 salchichas no serán suficientes. Si cada persona come 3 salchichas, necesitarás por lo menos 36. Como quieres tener el mismo número de salchichas que de bollitos de pan, decides comprar 48 de cada uno. ¿Cuántas salchichas quedarán de sobra si cada persona come 3 salchichas?

Es una simple resta. Hay 48 salchichas en total, y comerán 36 de ellas. Entonces, el número de salchichas sobrantes es

$$48 - 36 = 12.$$

Aunque este problema parece simple, de lo que no nos damos cuenta es que el problema al principio era así:

$$48 - 12 \times 3.$$

Es porque comenzamos con 48 salchichas y 12 personas que querían 3 salchichas cada una. Cuando observamos este problema, nuestro primer instinto es hacer las operaciones de izquierda a derecha. Si hacemos eso, terminamos con la siguiente respuesta:

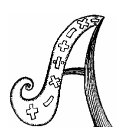
$$48 - 12 \times 3$$

$$36 \times 3 = 108$$

Sin embargo, sabemos que eso no es correcto porque nuestra respuesta debe ser menor que el número de salchichas con los que empezamos que era 48. Esto muestra que debemos tener algunas reglas para el orden a seguir en matemáticas. Así pues, aprenderemos el orden correcto de hacer las operaciones

Una regla que los matemáticos decidieron es que la multiplicación viene antes que la suma. ¿Y las otras operaciones, como la división y la resta?

Los matemáticos se han puesto de acuerdo en el siguiente orden de operaciones:



Algoritmo

Orden de operaciones

1. Simplificar expresiones entre *Paréntesis*.
2. Evaluar E*xponentes*.
3. Hacer toda *Multiplicación* y/o *División* de izquierda a derecha.
4. Hacer toda *Suma* y/o *Resta* de izquierda a derecha.

Una manera que podemos recordar el orden correcto para calcular expresiones es usando una de las siguientes frases (en inglés):

"Please Excuse My Dear Aunt Sally," o, si prefiere, "PEMDAS."

Please	**P**aréntesis
Excuse	**E**xponentes
My **D**ear	**M**ultiplicación o **D**ivisión
Aunt **S**ally	**A**dición (suma) o **S**ustracción (resta)

Ejemplo

Simplifica $4\times(6+2)$

Solución

Primero, vemos que esta expresión tiene multiplicación y suma, y también contiene un par de paréntesis. El orden correcto de las operaciones que usamos es:

$4\times(6+2)=4\times8$ (Suma dentro del paréntesis)

$=32$ (Multiplicación)

Ejemplo

Simplifica $9+5\times3$

Solución

$9+5\times3=9+15$ (Multiplicación)

$=24$ (Suma)

HECHO

Aunque no haya el signo "$\times$", un número al lado del paréntesis significa que debes multiplicar.

Ejemplo

Simplifica $5(3^2-6)$

Solución

$5(3^2-6)=5(9-6)$ (Exponente dentro del paréntesis)

$=5(3)$ (Resta dentro del paréntesis)

=15 (Multiplicación)

Ejemplo

Simplifica $4+3\times5-(6-2)^2\div2$

Solución

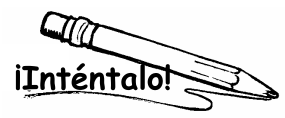
$4+3\times5-(6-2)^2\div2$

$=4+3\times5-4^2\div2$ (Paréntesis)

$=4+3\times5-16\div2$ (Exponentes)

$=4+15-8$ (Multiplicación y División)

$=11$ (Suma y Resta)



Simplifica cada expresión.

5. $(4+5)^2$

6. $3^2+2\times7+3$

Ahora entendemos que los paréntesis son una manera de agrupar términos. Nos dicen que evaluemos lo que está dentro de ellos primero. Los paréntesis pueden ser diferentes a los que acostumbras a ver. Una manera común de escribir paréntesis es así ( ) o con corchetes [ ]. Aunque cada par de paréntesis sea diferente del otro, significan lo mismo. A veces usamos diferentes paréntesis para leer frases numéricas de manera más fácil. Así, $((2+3)\times(3-1))^2$ parece mejor cuando se escribe como $[(2+3)\times(3-1)]^2$.

A veces, se usan paréntesis, pero no se pueden ver. Esto pasa cuando usamos una fracción. Así, la expresión $\frac{7+1}{9-5}$ significa realmente $(7+1)\div(9-5)$. Sabemos cómo simplificar expresiones de esta forma. Observa que una fracción es otra manera de mostrar la división. Exploraremos esto más tarde.

Usa la fracción usando paréntesis ( ) y el ÷ signo. Después simplifica las expresiones.

7. $\frac{4^2-4\times2}{3+1}$

8. $\frac{(12-6)^2-10\times3}{3\times2}$

Repaso

1. Marca las siguientes definiciones:
    a. factores
    b. primo
    c. compuesto
    d. factores únicos
    e. factores comunes
    f. Máximo Común Factor (MCF)
    g. múltiplos
    h. Mínimo Común Múltiplo (MCM)

2. Marca las cajas de "Algoritmo".

3. Escribe una pregunta que te gustaría hacerle a tu instructor, o algo nuevo que hayas aprendido en esta lección.

____

____

____

____

Problemas de práctica
Math On the Move Lección 4

Instrucciones: Escribe las respuestas en la libreta de matemáticas. Titula este ejercicio Math On the Move – Lección 4, Conjuntos A y B

Conjunto A

1. *Verdadero* o *Falso*: Todos los factores de 24 son primos.

2. Escribe los factores primos de los siguientes números (Pista: árboles de factores son herramientas útiles)

   a) 55 b) 63 c) 144 d) 210

3. Encuentra el MFC y MCM de los siguientes pares

   a) 3 y 5 b) 66 y 165 c) 130 y 182 d) 322 y 1150

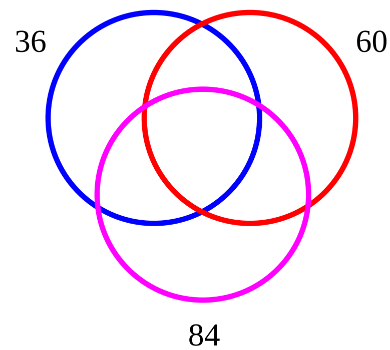
   e) 13 y 24 f) 41 y 42 g) 98 y 100 h) 12 y 120

Conjunto B

1. ¿Existe un máximo común factor de 3 y 13 ? Explica por qué o por qué no.

2. Encuentra el MCF y el MCM de 36, 60, y 84.

(*Pista*: Usa el siguiente diagrama de Venn. El producto de todos los números en el diagrama de Venn es el MCM)



3. ¿Cuántos múltiplos tiene el número 7? ¿Cómo lo sabes?

Respuestas a Inténtalo

1. a) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

   b) 1, 2, 5, 10

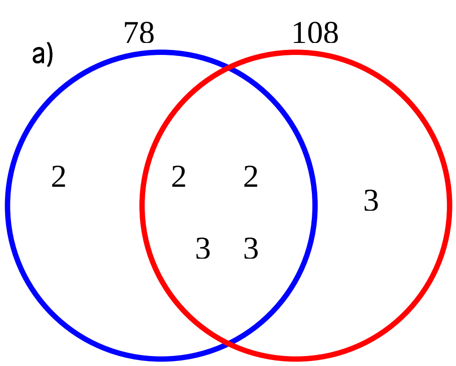
   c) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

2. a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

   b) $2 \times 2 \times 5 \times 5 = 100$

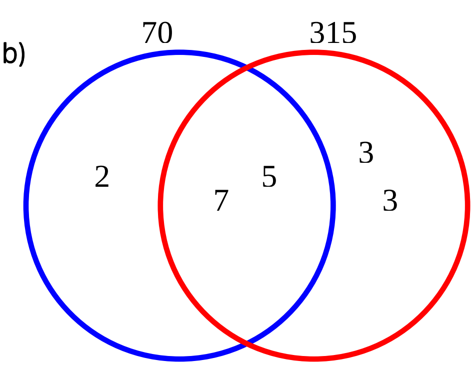
   c) $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

3. a)



$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

b)



$7 \times 5 = 35$

4. a) 16 b) 168 c) 221

5. $(4+5)^2 = 9^2 = 81$

6. $3^2 + 2 \times 7 + 3 = 9 + 14 + 3 = 26$

7. $\dfrac{4^2 - 4 \times 2}{3+1} = \left(4^2 - 4 \times 2\right) \div (3+1) = (16-8) \div 4 = 8 \div 4 = 2$

8. $\dfrac{(12-6)^2 - 10 \times 3}{3 \times 2} = \left[(12-6)^2 - 10 \times 3\right] \div (3 \times 2)$

$$\left[6^2 - 30\right] \div 6$$

$$6 \div 6 = 1$$

Fin de la lección 4